

Ghi Chú: Các bài tập cơ bản.

Câu 1. Đưa bài toán QHTT (D, f) sau về dạng chính tắc:

$$\min\{f(x) = \langle c, x \rangle := 2x_1 - x_2\}$$

và miền ràng buộc D là

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2, x_3 \geq 0; x_1 \text{ tự do} \end{cases}$$

Câu 2. 1. Hãy cho các ví dụ về một khúc lồi (tập lồi đa diện) trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$
 2. Hãy cho các ví dụ về đa diện lồi trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$
 3. Hãy chứng minh các tính chất của tập lồi trong giáo trình.

Câu 3. Chứng tỏ rằng tính lồi được bảo toàn qua phép biến đổi tuyến tính và phép biến đổi tuyến tính ngược:
 Cho A là ma trận $m \times n$ và cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi. CMR:

1. $D := \{Ax : x \in C\}$ là lồi.
2. $E := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \in C\}$ là lồi.

Câu 4. Cho C là tập lồi, đóng trong $\mathbb{R}^n$. CMR có một dạng siêu phẳng $H_i, i \in I$ dạng

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a^i, x \rangle = \alpha_i\}$$

sao cho

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a^i, x \rangle \leq \alpha_i, \forall i \in I\}$$

Câu 5. Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi, đóng, khác rỗng. Định nghĩa:

$$C^* := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \leq 1, \forall x \in C\}$$

CMR: 1. C^* là tập lồi chứa điểm gốc O .
 2. Nếu $O \in C$ thì $(C^*)^* = C$.

Câu 6. Cho $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, với A là ma trận $m \times n$. Giả sử có $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho $Ax < b$.
 CMR: $\dim P = n$.

Câu 7. Cho M là tập hợp gồm các điểm $x^1 = (0; 0)$; $x^2 = (2; 0)$; $x^3 = (3; 0)$; $x^4 = (2; 1)$; $x^5 = (1; 2)$; $x^6 = (0; 1)$; $x^7 = (1; 1)$ trong mặt phẳng (Ox_1x_2)

1. Hãy xác định $D := \text{conv}\{M\}$ (D là tập lồi bé nhất chứa M).
2. Cho biết điểm nào của M là điểm trong, điểm biên, điểm cực biên của D . Cho biết D có phải là một đa diện lồi và đóng hay không?
3. Cho biết D là phần giao của các nửa không gian con đóng nào của (Ox_1x_2) .
4. Hãy biểu diễn điểm $x^7 = (1, 1)$ theo tổ hợp lồi các điểm cực biên của D .
5. Cho $x^0 = (3; 2)$. Dựa vào định lý tách tập lồi; tìm một siêu phẳng dạng

$$H := \{x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 : \langle a; x \rangle = \beta; a \in \mathbb{R}^2, \beta \in \mathbb{R}\}$$

tách x^0 và D .

Có thể biểu diễn siêu phẳng tách ở trên dạng sau hay không

$$H := \{x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 : \langle a; x \rangle = \beta; a \in \mathbb{R}^2; \|a\| = 1, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Câu 8. Cho bài toán qui hoạch tuyến tính $(D; f)$ trong đó f là hàm mục tiêu xác định bởi:

$$f(x) := \langle c; x \rangle = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

và miền ràng buộc D là

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Hãy giải bài toán trên bằng phương pháp hình học.
2. Đưa bài toán trên về dạng chính tắc.
3. Giải bài toán trên bằng thuật toán đơn hình dạng bảng.

Câu 9. Cho tập D là miền ràng buộc ở câu 8; và hàm mục tiêu

$$g(x) := x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

Hãy giải bài trên bằng phương pháp hình học. Có nhận xét gì về số nghiệm tối ưu của bài toán này?

Câu 10. Cho bài toán qui hoạch tuyến tính $(D; f)$ trong đó f là hàm mục tiêu xác định bởi:

$$f(x) := \langle c; x \rangle = x_1 - 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

và miền ràng buộc D là

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_3 \leq 28 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 12 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Giải bài toán trên bằng thuật toán đơn hình dạng bảng.

Câu 11. Dùng thuật toán đơn hình hai pha giải bài toán QHTT $(D; f)$ trong đó f là hàm mục tiêu xác định bởi:

$$f(x) := \langle c; x \rangle = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

và miền ràng buộc D là

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \leq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ 3x_1 + 2x_2 = 14 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 12. Cho bài toán qui hoạch tuyến tính $(D; f)$ trong đó f là hàm mục tiêu xác định bởi:

$$f(x) := \langle c; x \rangle = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

và miền ràng buộc D là

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Xác định bài toán đối ngẫu (D_g, g) của (D, f) .
2. Giải bài toán đối ngẫu (D_g, g) và tìm nghiệm của (D, f) .

Câu 13. 1. Cho $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = f(x_1, x_2) := 1 - x_1^2 x_2$; $d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$; $d_2 = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j$ với $i = (1, 0)$ và $j = (0, 1)$. Tính đạo hàm theo hướng $Df(x^0, d_1)$ và $Df(x^0, d_2)$ tại $x^0 = (1, 3)$.

2. Cho $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = f(x_1, x_2) := 1 + 2x_1 + x_2^3$; $P(2, 1); Q(14, 6) \in \mathbb{R}^2$. Tính đạo hàm theo hướng $Df(x^0, d)$, với $x^0 = P(2, 1)$ và d là véc tơ PQ .

Câu 14. Tìm các điểm dừng (điểm cực đại, cực tiểu và yên ngựa) của các hàm hai biến sau: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y + 3$.
2. $f(x, y) = 2x^3 - 2y^3 - 4xy + 5$.

Câu 15. Tìm điểm trên mặt phẳng $P : 3x + 2y + z = 6$ trong không gian $(Oxyz)$ gần gốc tọa độ nhất.

Câu 16. Tìm điểm trên $H : x^2 - y^2 = 4$ trong không gian $(Oxyz)$ gần với điểm $A(0, 2)$ nhất.